Relatively nonexpansive写像族の共通不動点集合について (非線形解析学と凸解析学の研究)

高阪, 史明

数理解析研究所講究録
第 1685 巻 2010 年 18-25

Relatively nonexpansive 写像族の共通不動点集合について
(On the common fixed point set of a family of relatively nonexpansive mappings)

大分大学 工学部 高阪 史明 (Kohsaka, Fumiaki)*
Department of Computer Science and Intelligent Systems,
Oita University

概要

本稿では，バナッハ空間における relatively nonexpansive 写像族の共通不動点集合に関して得られた結果を述べる．また，これらの結果を用いて得られた共通不動点への収束定理も述べる．

1 はじめに

次の定理は Bruck [7] によるものである．

定理 1.1 ([7])**.** E を狭義凸バナッハ空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．$\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ を C から E への nonexpansive 写像の族で $\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)$ が空でないものとし，$V: C \to E$ を

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} s_k T_k$$

により定義する．ここで，$\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ は正数列で $\sum_{k=1}^{\infty} s_k = 1$ を満たすものとする．このとき，V は nonexpansive 写像であり，$F(V) = \bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)$ が成立する．

Aoyama-Kimura-Takahashi-Toyoda [2,3] は，定理 1.1 を用いてバナッハ空間における nonexpansive 写像族の共通不動点への収束定理を証明した．

* 大分大学 工学部 知能情報システム工学科; 〒870-1192 大分市旦野原 700; email: f-kohsaka@csis.oita-u.ac.jp

Matsushita-Takahashi [18, 19] は，ヒルベルト空間における (不動点を持つような) nonexpansive 写像のクラスのバナッハ空間における一般化として，relatively nonexpansive 写像のクラスを導入した．このクラスは，バナッハ空間における凸最小化問題，変分不等式問題，ミニ・マックス問題，制約可能性問題，均衡問題等の近似解法を研究する際に大切な役割を果たす．

本稿では，Bruck の定理 (定理 1.1) における $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ を relatively nonexpansive 写像の族とした場合に同様の結論が得られるのか，という問題に対する幾つかの解答を述べる．また，これらの結果を用いて得られた relatively nonexpansive 写像族の共通不動点への収束定理も述べる．

2 準備

$\mathbb{R}$ 及び $\mathbb{N}$ でそれぞれ実数全体の集合及び正の整数全体の集合を表す．本稿を通して，$\mathbb{R}$ 上の線形空間を扱う．E をバナッハ空間とするとき，E^* でその双対空間を表す．$\|\cdot\|$ で E 及び E^* のノルムを表す．また，$x^* \in E^*$ 及び $x \in E$ に対し，$x^*(x)$ を $\langle x, x^* \rangle$ とも表記する．さらに，E の点列 $\{x_n\}$ が $x \in E$ に強収束すること及び弱収束することをそれぞれ $x_n \to x$ 及び $x_n \rightharpoonup x$ で表す．バナッハ空間 E からその双対空間 E^* への双対写像 J は

$$Jx = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\} \quad (\forall x \in E)$$

により定義される．

バナッハ空間 E が狭義凸であるとは，任意の $x, y \in S(E)$ で $x \neq y$ を満たすものに対し，$\|(x+y)/2\| < 1$ が成り立つことを言う．ここで，$S(E) = \{z \in E : \|z\| = 1\}$ である．E が一様凸であるとは，任意の $\varepsilon \in (0, 2]$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在し，$x, y \in S(E)$ かつ $\|x - y\| \geq \varepsilon$ ならば $\|(x+y)/2\| \leq 1 - \delta$ が成り立つことを言う．E が滑らかであるとは，任意の $x, y \in S(E)$ に対し，

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

が存在することを言う．E が滑らかであるとき，任意の $x \in E$ に対して Jx は一点集合となる．この場合，J を E から E^* への一価写像とみなす．また，E が一様に滑らかであるとは，(2.1) が $x, y \in S(E)$ に関して一様収束することを言う．E が滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間であれば，E から E^* への双対写像 J は一価かつ全単射となる．また，J は E のノルム位相及び E^* の弱位相に関して連続である．さらに，E^* から E への双対

写像は J^{-1} と一致する．また，E が滑らかなバナッハ空間であるとき，双対写像 J が弱点列的連続であるとは，任意の E の点列 $\{x_n\}$ で $x_n \rightharpoonup x$ となるものに対し，$Jx_n \overset{*}{\rightharpoonup} Jx$ が成り立つことを言う．ここで，$\overset{*}{\rightharpoonup}$ は汎弱収束を表す．

E をバナッハ空間，C を E の空でない部分集合とし，$T\colon C \to E$ とする．このとき，T の不動点集合は $F(T) = \{z \in C : Tz = z\}$ で定義される．また，$z \in C$ が T の漸近的不動点であるとは，ある C の点列 $\{z_n\}$ が存在して，$z_n \rightharpoonup z$ かつ $z_n - Tz_n \to 0$ が成り立つことを言う ([20])．T の漸近的不動点全体の集合を $\widehat{F}(T)$ で表す．T が nonexpansive であるとは，

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad (\forall x, y \in C)$$

が成り立つことを言う．T が quasi-nonexpansive であるとは，$F(T) \neq \emptyset$ かつ

$$\|u - Tx\| \leq \|u - x\| \quad (\forall u \in F(T),\, x \in C)$$

が成り立つことを言う．I で恒等写像を表す．非線形関数解析学については [21, 22] を参照すると良い．バナッハ空間の幾何学及び双対写像については [10] も参照すると良い．

E が滑らかなバナッハ空間であるとき，

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2 \quad (\forall x, y \in E)$$

により関数 $\phi\colon E \times E \to \mathbb{R}$ を定義する ([1, 12])．これは，$\|\cdot\|^2$ に関する Bregman 距離 $D_{\|\cdot\|^2}$ と一致する．ここで，Gâteaux 微分可能な凸関数 $g\colon E \to \mathbb{R}$ に関する Bregman 距離 $D_g\colon E \times E \to \mathbb{R}$ は

$$D_g(x, y) = g(x) - \langle x - y, \nabla g(y)\rangle - g(y) \quad (\forall x, y \in E)$$

により定義される ([8])．ただし，∇g は g の Gâteaux 微分である．容易に分かるように，$\phi(x, y) \geq (\|x\| - \|y\|)^2$ が任意の $x, y \in E$ に対して成り立つ．E がヒルベルト空間の場合，J が E 上の恒等写像 I と一致し，$\phi(x, y) = \|x - y\|^2$ が任意の $x, y \in E$ に対して成り立つ．$T\colon C \to E$ が (r) 型であるとは，$F(T) \neq \emptyset$ かつ

$$\phi(u, Tx) \leq \phi(u, x) \quad (\forall u \in F(T),\, x \in C)$$

が成り立つことを言う ([4])．E がヒルベルト空間の場合，T が (r) 型であることは T が quasi-nonexpansive であることに同値である．また，(r) 型の写像 T が relatively nonexpansive であるとは，$\widehat{F}(T) = F(T)$ が成り立つことを言う ([18, 19])．さらに，

relatively nonexpansive 写像 T が strongly relatively nonexpansive であるとは，$\{z_n\}$ が C の有界列で

$$\phi(u, z_n) - \phi(u, Tz_n) \to 0$$

があるu $u \in F(T)$ について成り立つとき，$\phi(Tx_n, x_n) \to 0$ となることを言う ([6, 14, 20]).
E を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．このとき，任意の $x \in E$ に対してただ一つの $z_x \in C$ が存在し，

$$\phi(z_x, x) = \min_{y \in C} \phi(y, x)$$

が成り立つ．$\Pi_C x = z_x$ で定義される写像 Π_C を E から C 上への generalized projection と言う ([1,12])．これは，ヒルベルト空間の閉部分空間上への直交射影や空でない閉凸集合上への距離射影のバナッハ空間における一般化の一つである．Relatively nonexpansive 写像や strongly relatively nonexpansive 写像の例については [4–6, 14–20] やそれらの参考文献を参照すると良い．

3 結果

Censor-Reich [9] は，Bregman 距離と相性の良い新しい凸結合を定義した．この凸結合は，[11, 13] において，バナッハ空間における極大単調作用素に対する近接点法の研究に応用された．

ここでは，Censor-Reich [9] の意味での凸結合を用いて得られた，次の (r) 型写像の可算族の共通不動点集合に関する結果を述べる．

命題 3.1 ([15])．E を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．$\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ を C から C への (r) 型写像の族で $\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)$ が空でないものとし，$U\colon C \to C$ を

$$U = \Pi_C J^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} s_k J T_k$$

により定義する．ここで，$\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ は正数列で $\sum_{k=1}^{\infty} s_k = 1$ を満たすものとする．このとき，U は (r) 型写像であり，$F(U) = \bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)$ が成立する．

この命題を用いると，ヒルベルト空間における quasi-nonexpansive 写像の可算族に対する系を得ることができる．

系 3.2. E をヒルベルト空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．$\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ を C から C への quasi-nonexpansive 写像の族で $\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)$ が空でないものとし，$V\colon C \to C$ を $V = \sum_{k=1}^{\infty} s_k T_k$ により定義する．ここで，$\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ は正数列で $\sum_{k=1}^{\infty} s_k = 1$ を満たすものとする．このとき，V は quasi-nonexpansive 写像であり，$F(V) = \bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)$ が成立する．

次に，relatively nonexpansive 写像の可算族に対する次の定理を述べる．

定理 3.3 ([15])**.** E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．$\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ を C から C への relatively nonexpansive 写像の族で $\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)$ が空でないものとし，$U\colon C \to C$ を

$$U = \Pi_C J^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} s_k \left(\alpha_k J + (1-\alpha_k) J T_k\right)$$

により定義する．ここで，$\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ は正数列で $\sum_{k=1}^{\infty} s_k = 1$ を満たすものとし，$\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ は $(0,1)$ の数列とする．このとき，U は relatively nonexpansive 写像であり，$F(U) = \bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)$ が成立する．

より最近になり，次の定理も得られた．

定理 3.4 ([5])**.** E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．$\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ を C から E への relatively nonexpansive 写像の族で $\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)$ が空でないものとし，$V\colon C \to E$ を

$$V = J^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} s_k J T_k$$

により定義する．ここで，$\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ は正数列で $\sum_{k=0}^{\infty} s_k = 1$ を満たすものとし，$T_0 = I$ とする．このとき，V は relatively nonexpansive 写像であり，$F(V) = \bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)$ が成立する．

4 収束定理

本節では，前節での結果を用いて得られた relatively nonexpansive 写像の可算族の共通不動点への収束定理を述べる．定理 3.4 を用いると，次の補題を証明することができる．

補題 4.1 ([5]). E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．$\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ を C から E への relatively nonexpansive 写像の族で $\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)$ が空でないものとし，$T_0 = I$ とする．$\{\beta_{n,k}\}$ $(n \in \mathbb{N},\ k \in \{0,1,\dots,n\})$ を正数列で，$\sum_{k=0}^{n} \beta_{n,k} = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ 及び $\inf_{n\in\mathbb{N}} \beta_{n,0} > 0$ を満たし，$\lim_n \sum_{k=0}^{n} |\beta_k - \beta_{n,k}| = 0$ がある $(0,1)$ の数列 $\{\beta_k\}$ に対して成り立つものとする．また，C から E への写像列 $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$V_n = J^{-1} \sum_{k=0}^{n} \beta_{n,k} J T_k \quad (n = 1, 2, \dots)$$

により定義する．このとき，C の任意の空でない有界部分集合 D と任意の自然数の単調増加列 $\{n_i\}$ に対し，ある写像 $V\colon C \to E$ と $\{n_i\}$ のある部分列 $\{n_{i_j}\}$ が存在し，

(1) $\lim_j \sup_{y\in D} \left\| Vy - V_{n_{i_j}} y \right\| = 0$
(2) $\widehat{F}(V) = \bigcap_{k=1}^{\infty} F(V_k)$

が成り立つ．

補題 4.1 を用いると，次の relatively nonexpansive 写像の可算族の共通不動点への収束定理を得ることができる．

定理 4.2 ([5]). E，C，$\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$，T_0，$\{\beta_{n,k}\}$ 及び $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ を補題 4.1 と同じものとする．また，$x_1 = x \in C$ とし，

$$x_{n+1} = \Pi_C V_n x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．このとき，次が成立する．

(1) $\{x_n\}$ は有界であり，その任意の弱収束部分列の極限は $\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)$ に属する．
(2) J が弱点列的連続であれば，$\{x_n\}$ は $\{\Pi_{\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)}(x_n)\}$ の強極限に弱収束する．
(3) C がコンパクト又は $\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)$ が内点を持てば，$\{x_n\}$ は $\{\Pi_{\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)}(x_n)\}$ の強極限に強収束する．

定理 4.2 の系として次を得る．

系 4.3 ([5]). E，C 及び $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ を補題 4.1 と同じものとする．また，$x_1 = x \in C$ とし，

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1} \left(\frac{1}{2} J + \frac{1}{4} J T_1 + \cdots + \frac{1}{2^n} J T_{n-1} + \frac{1}{2^n} J T_n \right) x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．このとき，次が成立する．

(1) $\{x_n\}$ は有界であり，その任意の弱収束部分列の極限は $\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)$ に属する．

(2) J が弱点列的連続であれば，$\{x_n\}$ は $\{\Pi_{\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)}(x_n)\}$ の強極限に弱収束する．

(3) C がコンパクト又は $\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)$ が内点を持てば，$\{x_n\}$ は $\{\Pi_{\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)}(x_n)\}$ の強極限に強収束する．

また，補題 4.1 を用いると，次の強収束定理を得ることもできる．

定理 4.4 ([5]). E, C, $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$, T_0, $\{\beta_{n,k}\}$ 及び $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ を補題 4.1 と同じものとする．また，$x_1 = x \in C$ とし，

$$\begin{cases} H_n = \{z \in C : \phi(z, V_n x_n) \le \phi(z, x_n)\} \\ W_n = \{z \in C : \langle z - x_n, Jx - Jx_n \rangle \le 0\} \\ x_{n+1} = \Pi_{H_n \cap W_n}(x) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

とする．このとき，$\{x_n\}$ は $\Pi_{\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)}(x)$ に強収束する．

定理 4.5 ([5]). E, C, $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$, T_0, $\{\beta_{n,k}\}$, 及び $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ を補題 4.1 と同じものとする．また，$x_1 = x \in C = C_0$ とし，

$$\begin{cases} C_n = \{z \in C_{n-1} : \phi(z, V_n x_n) \le \phi(z, x_n)\} \\ x_{n+1} = \Pi_{C_n}(x) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

とする．このとき，$\{x_n\}$ は $\Pi_{\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)}(x)$ に強収束する．

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.

[2] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Approximation of common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space*, Nonlinear Anal. **67** (2007), 2350–2360.

[3] ———, *Finding common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space*, Sci. Math. Jpn. **66** (2007), 89–99.

[4] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Strong convergence theorems by shrinking and hybrid projection methods for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009, pp. 7–26.

[5] ———, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–224.

[6] K. Aoyama and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory **8** (2007), 143–160.

[7] R. E. Bruck Jr., *Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **179** (1973), 251–262.

[8] D. Butnariu and A. N. Iusem, *Totally convex functions for fixed points computation and infinite dimensional optimization*, Applied Optimization, vol. 40, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[9] Y. Censor and S. Reich, *Iterations of paracontractions and firmly nonexpansive operators with applications to feasibility and optimization*, Optimization **37** (1996), 323–339.

[10] I. Cioranescu, *Geometry of Banach spaces, duality mappings and nonlinear problems*, Mathematics and its Applications, vol. 62, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990.

[11] S. Kamimura, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for maximal monotone operators in a Banach space*, Set-Valued Anal. **12** (2004), 417–429.

[12] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[13] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. (2004), 239–249.

[14] ———, *Approximating common fixed points of countable families of strongly nonexpansive mappings*, Nonlinear Stud. **14** (2007), 219–234.

[15] ———, *The set of common fixed points of an infinite family of relatively nonexpansive mappings*, Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces II, Yokohama Publishers, Yokohama, 2008, pp. 361–373.

[16] ———, *Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive-type mappings in Banach spaces*, SIAM J. Optim. **19** (2008), 824–835.

[17] ———, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **91** (2008), 166–177.

[18] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2004** (2004), 37–47.

[19] ———, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[20] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 313–318.

[21] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis. -Fixed Point Theory and its Applications*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[22] ———, *Introduction to Nonlinear and Convex Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.